# Compito di algebra lineare del 6 giugno 2016

**Istruzioni:** I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

**Esercizio 1.** Siano $V$ e $W$ due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

**Esercizio 2.** Considera la rotazione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$, definita dalla matrice ortogonale

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina l'asse $r$ ed il coseno dell'angolo di rotazione di $f$.
(2) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che $g(x) = Ax + b$ non abbia punti fissi.
(3) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^2$ tale che $g(x) = Ax + b$ abbia almeno un punto fisso.

**Esercizio 3.** Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leqslant 2$. Considera il prodotto scalare $g$ su $\mathbb{R}_2[x]$ definito nel modo seguente.

$$g(p, q) = p'(1)q'(1) + p(0)q(0)$$

dove $p'$ e $q'$ indicano le derivate dei polinomi $p$ e $q$.

(1) Calcola la segnatura di $g$.
(2) Determina quali sono i polinomi $p$ tali che $g(p, q) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}_2[x]$.

**Esercizio 4.** Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici $2 \times 2$. Data una matrice $A$, consideriamo l'applicazione lineare $T_A\colon M(2) \to M(2)$ seguente:

$$T_A(X) = AX.$$

(1) Dimostra che $T_A$ è diagonalizzabile nel caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Più in generale, dimostra che $A$ è diagonalizzabile se e solo se $T_A$ è diagonalizzabile.

## Soluzioni

**Esercizio 1.** La formula di Grasmann dice che

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 6 - \dim(V + W).$$

Notiamo che

$$V \subset V + W \subset \mathbb{R}^4$$

quindi $V + W$ può avere solo dimensione 3 o 4. Ne segue che $V \cap W$ può avere solo dimensione 3 (se $V = W$) e 2 (se $V \neq W$). Entrambi i casi possono accadere, ad esempio:

- se $V = W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ allora $\dim V \cap W = 3$;
- se $V = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_4)$ allora $\dim V \cap W = 2$.

**Esercizio 2.**

(1) Si verifica che l'autospazio $V_1$ di $f$ è generato dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'asse della rotazione è $r = \mathrm{Span}(v) = V_1$.

(2) Se $b = v$ allora $g$ è una rototraslazione e quindi non ha punti fissi.

(3) Consideriamo il piano $\pi = v^\perp$ ortogonale a $v$. Se $b \in \pi$, ad esempio se

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora $g$ fissa il piano $\pi$ e si verifica che ha un punto fisso in $\pi$ perché il sistema $(A - I)x = -b$ ha soluzione.

**Esercizio 3.**

(1) La matrice associata a $g$ nella base $\{1, x, x^2\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che la segnatura è $(2, 0, 1)$ in uno dei metodi seguenti:
- gli autovalori della matrice sono $0, 1, 5$;
- $A$ ha rango 2 e quindi $i_0 = 3 - 2 = 1$; la restrizione di $A$ al piano generato da $e_1, e_2$ è definita positiva e quindi $i_+ \geqslant 2$.

(2) Dobbiamo determinare il radicale di $g$, che in coordinate conicide con $\ker A$. Otteniamo $\ker A = \mathrm{Span}(0, 2, -1)$ e quindi il radicale è generato da $2x - x^2$. I polinomi sono tutti quelli del tipo $p(x) = -ax^2 + 2ax$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4.**

(1) Nella base canonica di $M(2)$ formata da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata a $T_A$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che questa matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori 1 e 2 hanno entrambi molteplicità geometrica 2.

(2) Ci sono due implicazioni da mostrare.
- $A$ è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ $T_A$ diagonalizzabile. Per ipotesi esiste una base $\{v_1, v_2\}$ di autovettori per $A$, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2$.
  Indichiamo con $(vw)$ la matrice $2 \times 2$ avente come colonne $v, w \in \mathbb{R}^2$. Notiamo che $Av_i = \lambda_i v_i$ implica che $A(v_i 0) = \lambda_i (v_i 0)$. Quindi le matrici quadrate $(v_1 0), (v_2 0), (0 v_1), (0 v_2)$ sono autovettori per $T_A$, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2$. Queste sono indipendenti e allora formano una base di $M(2)$, quindi $T_A$ è diagonalizzabile.
- $T_A$ è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ $A$ diagonalizzabile. Per ipotesi esiste una base $M_1, M_2, M_3, M_4$ di autovettori per $T_A$, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Ciascuna $M_i$ è una matrice $2 \times 2$ e abbiamo $T_A(M_i) = AM_i = \lambda_i M_i$. Segue che qualsiasi colonna non nulla di qualsiasi $M_i$ è un autovettore per $A$. Fra le 8 colonne a disposizione ce ne sono almeno due indipendenti, perché le matrici $M_1, \ldots, M_4$ sono indipendenti.

È anche possibile usare il teorema di diagonalizzabilità e mostrare che le sue ipotesi sono valide per $A$ se e solo se lo sono per la matrice associata a $T_A$.